$\mathbb{R}$: reelle Zahlen

$0, 1, 2, 3, \dots$

$-1, -2, -3, -4, \dots$

$4/5, 27/32, \dots$

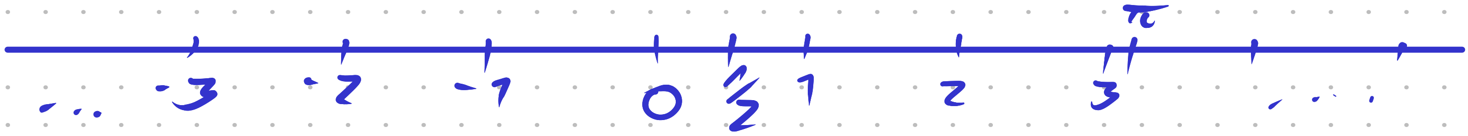
$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \dots$

π, e

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

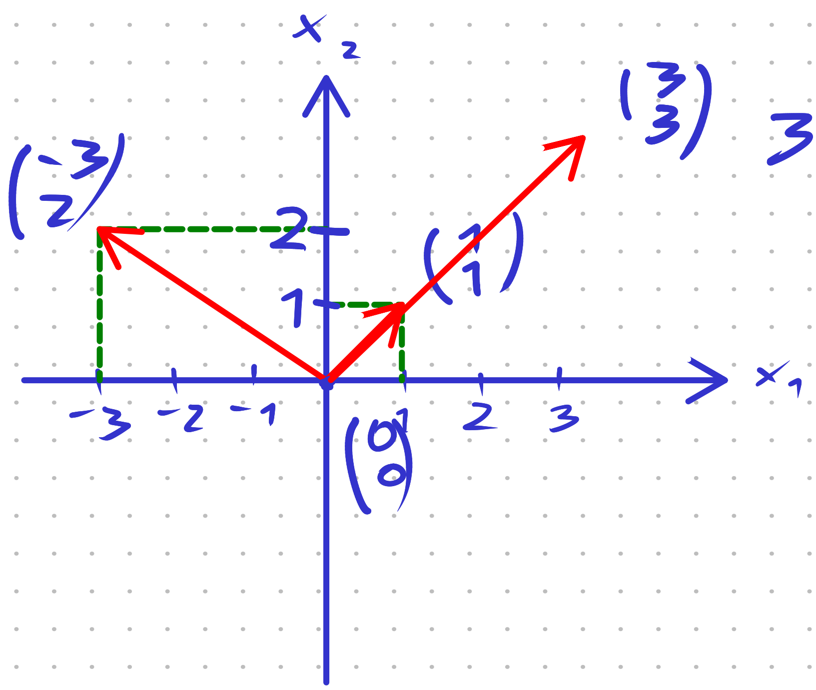
„ist ein Element von"

$\longrightarrow$ Analysis I



$\mathbb{R}^2$ | Paare reeller Zahlen
(geordnete) 2-Tupel
2-dimensionale Vektoren

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \pi \end{pmatrix}$



$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Null-vektor: $\underline{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

linke Seite wird definiert durch die rechte

Addition:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$

$(\lambda \in \mathbb{R})$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

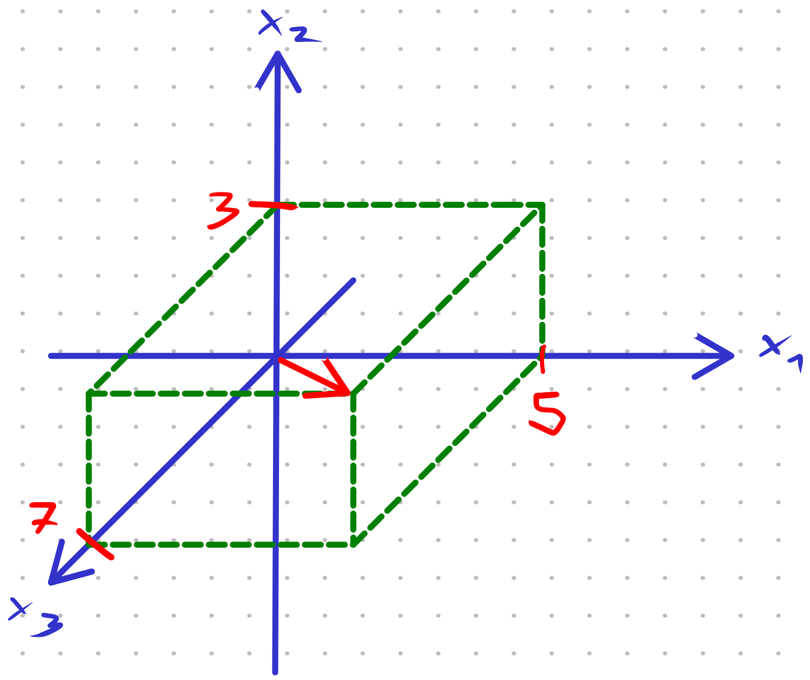
(Subtraktion:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

)

$\mathbb{R}^3$: Tripel

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad (5, 3, 7)$$



$\mathbb{R}^n$ | n-Tupel $(n = 0, 1, 2, \ldots)$
n-dimensionale Vektoren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

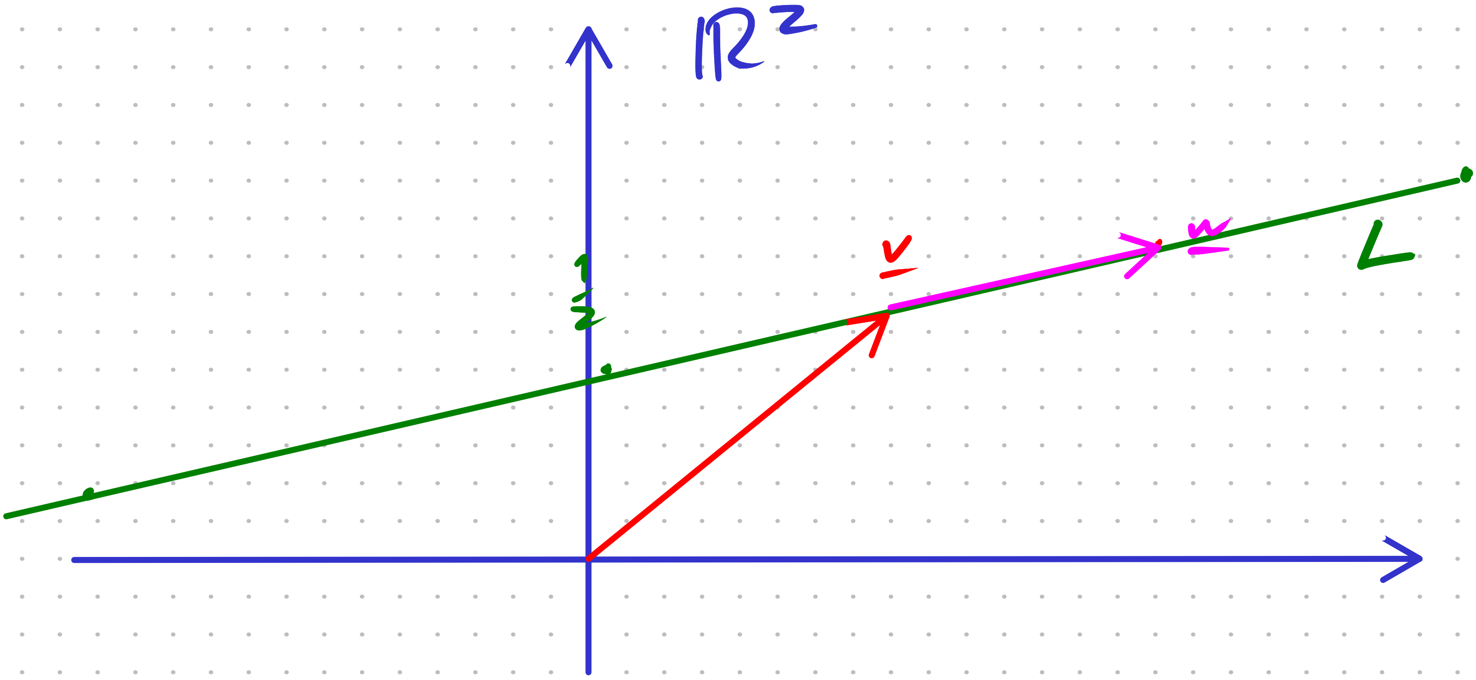
bedeutet: $x_1 = y_1$
und $x_2 = y_2$
und
$\vdots$
und $x_n = y_n$

Nullvektor: $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Addition, Skalarmultipl.
wie für $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R}^0$ besteht nur aus
Nullvektor $\underline{0} = ()$

Anschauung $\mathbb{R}^n$
$\longrightarrow$ Tutorium



Beweis

($\Leftarrow$) Seien a_1, a_2, b gegeben.

$\underline{v}$? $\underline{w}$?

Annahme: $a_1 \neq 0$

Rate $\underline{v}, \underline{v}' \in L$:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} b/a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in L$$

$$\underline{v}' = \begin{pmatrix} \frac{b-a_2}{a_1} \\ 1 \end{pmatrix} \in L$$

$$\underline{w} = \underline{v}' - \underline{v} = \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Behauptung:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\} = \underline{v} + \mathbb{R} \cdot \underline{w}$$

($\subseteq$) Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ aus linker Seite gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b/a_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}} + x_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{w}}$$

$$= \underline{v} + x_2 \cdot \underline{w}$$

$$\in \underline{v} + \mathbb{R} \cdot \underline{w}$$

($\supseteq$) Für $\underline{x} = \underline{v} + \lambda \cdot \underline{w}$ aus rechter Seite gilt:

$$x_1 = v_1 + \lambda \cdot w_1$$
$$x_2 = v_2 + \lambda \cdot w_2$$

also

$$x_1 = b/a_1 + \lambda \cdot \left(-\frac{a_2}{a_1}\right)$$
$$x_2 = 0 + \lambda \cdot 1$$

also ist

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b - \cancel{\lambda a_2} + \cancel{\lambda a_2} = b,$$

also liegt $\binom{x_1}{x_2}$ in linker Seite.

Annahme $a_2 \neq 0$ — analog

(Umnummerieren)

$a_1 = 0$ und $a_2 = 0$ unmöglich nach Annahme.

($\Rightarrow$) $\underline{v}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$ gegeben

a_1, a_2, b ?

$$\underline{v} \in L: \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 = b \quad \cdot(-1)$$
$$\underline{v}+\underline{w} \in L: \quad a_1(v_1 + w_1) + a_2(v_2 + w_2) = b$$

$$(\mathrm{I}) \quad a_1 w_1 + a_2 w_2 = 0$$
$$(\mathrm{II}) \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 = b$$

Annahme $w_1 \neq 0$:

Rate $a_2 = 1$:

Dann $a_1 = \frac{-w_2}{w_1}$ (wegen I)

$b = \frac{-w_2 v_1}{w_1} + v_2$ (wegen II)

Behauptung:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\} = \underline{v} + \mathbb{R} \cdot \underline{w}$$

mit obigen Werten für a_1, a_2, b

$(\subseteq)$ ...

$(\supseteq)$ ...

Annahme $w_2 \neq 0$

—analog.

$w_1 = 0$ und $w_2 = 0$ ausgeschlossen nach Annahme.

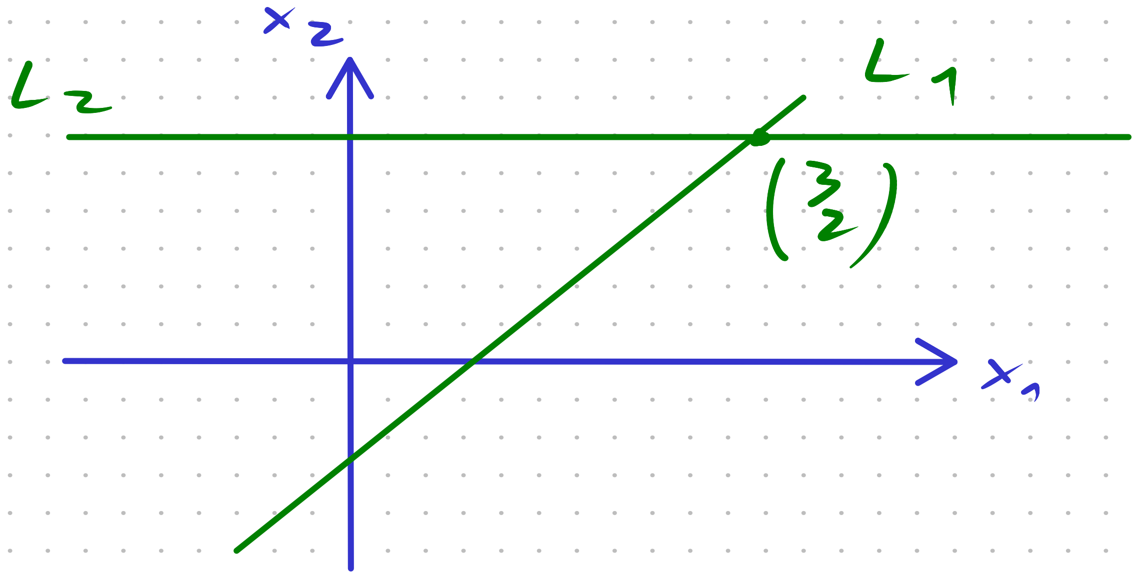
$\square$

Beweis zu Ende

Beispiel:

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 - x_2 = 1 \right\}$$

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 = 2 \right\}$$



$$L_1 \cap L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \text{and} \;\; \begin{matrix} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 = 2 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \text{und} \;\; \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$$

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; 2x_1 + 4x_2 = 2 \right\}$$

$$L_1 \cap L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \text{ und } \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \text{ und } \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \text{ und } \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0 = 1 \end{array} \right\}$$

$$= \{\}$$

$$= \emptyset$$